PRIJEMNI ISPIT IZ MATEMATIKE

prof. dr Momčilo Bjelica

2009. jun

215. (1) Uprostiti izraz

$$\left[-\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p^3-q^3}:\frac{1}{p^2+pq+q^2}\right]\cdot\frac{p^2-q^2}{2p^2}+1:(p^2+p),$$

gde je $p\neq\pm q$, $p\neq-1$ i $p\neq 0$.
216. (2) Rešiti jednačinu $7^{2x}-8\cdot 7^x+7=0$.
217. (3) Rešiti jednačinu

$$\frac{\log x+\log(5x+8)}{\log(5x-4)}=2.$$

218. (4) Dokazati jednakost

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}=2.$$

219. (5) Ako je $f(x)=\sin x$, dokazati da je
(a) $f(2x)=2f(x)\sqrt{1-f^2(x)}$,
(b) $f(x)+f(y)=2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\sqrt{1-f^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}$.

2009. septembar

220. (1) Dokazati jednakost

$$\frac{2a^2+7a+3}{a^3-1}-\frac{1-2a}{a^2+a+1}-\frac{3}{a-1}=\frac{1}{a-1}.$$

221. (2) Ako je osnova logaritma 10, rešiti jednačinu

$$\frac{3-\log 5}{5-\log x}+\frac{\log x}{1+\log x}=1.$$

222. (3) Dokazati identitet, za $\frac{\pi}{4}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\sqrt{1-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

2010. jun

223. (1) Dokazati jednakost

$$\left(\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x^3-1)^2}\right)^2\cdot\left(\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{(x^3+1)^2}\right)^2=1.$$

224. (2)Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$7^{2x}-6\cdot 7^x-7=0.$$

225. (3) Rešiti jednačinu

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2+5x+8)}=0,4^{-1}.$$

226. (4) Za koje vrednosti realnog parametra a jednačina

$$\sin^6 x+\cos^6 x=a(\sin^4 x+\cos^4 x)$$

ima rešenje?

227. (5) Ako je

$$f(x)=\frac{x-10}{x+10},$$

izračunati $f(x+5)-f(x-5)$.

2010. septembar

228. (1) Uprostiti razlomak

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}-(b^2+c^2-a^2):\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{a^2+b^2+c^2}.$$

229. (2) Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$9^{\tan x}-2\cdot 3^{\tan x}=3.$$

230. (3) Dokazati da važi jednakost $f(x)+f(\frac{1}{x})=28$, ako je

$$f(x)=\log_7 x+7\log_3 9x.$$

231. (4) Dokazati identitet

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\frac{1}{8}\sin^4 2x-\sin^2 2x+1.$$

232. (5) Dato je $a_0=1$, $a_1=3$, kao i opšta rekurentna relacija

$$a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=(-1)^n,\qquad n\geq 1.$$

Izračunati a_3.

2011. jun

233. (1) Uprostiti izraz

$$\left[\frac{x^3-1}{x+1}\cdot\frac{x}{x^3+1}\right]:\left[\frac{(x+1)^2-x}{(x-1)^2+x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)\right].$$

234. (2) Rešiti eksponencijalnu jednačinu $121^x-12\cdot 11^x+11=0$.
235. (3) Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}\log_2 x-\log_2 y &= \log_2 7-1\\ \log_{25}(x-y) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

236. (4) Uprostiti trigonometrijski izraz

$$\frac{2\cos^2\alpha-1}{2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}.$$

237. (5) Ako je $f(1+\sqrt{x})=x$, odrediti $f(f(x))$.

2011. septembar

238. (1) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{1}{a-1}-\frac{a^3+1}{a^4-a}\right)\cdot\frac{a-a^3}{a+1}.$$

239. (2) Rešiti jednačinu $7^{2t}-8\cdot 7^t+7=0$.
240. (3) Ako je

$$f(x)=\log_x 6+3\log_3 9x,$$

izračunati $f(x)+f(1/x)$.
241. (4) Uprostiti izraz

$$\sin^5 x-\sin x\cos^4 x.$$

2012. jun

242. (1) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{x^3}{x^4-x}-\frac{1}{x-1}\right):\frac{x+1}{x^3-1}.$$

243. (2) Uprostiti

$$\frac{1}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}-\sqrt{y}}.$$

244. (3) Odrediti zbir kvadrata rešenja jednačine

$$2^{x^2-2x-10}=\frac{1}{4}.$$

245. (4) Rešiti jednačinu

$$\log^2_{\sqrt{2}} x+3\log_2 x+\log_{1/2} x=2.$$

246. (5) Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x-\cos x}+\frac{\sin^4 x-\cos^4 x}{\sin^2 x-\cos^2 x}=3.$$

2012. jun Matematika sa proverom sklonosti za studije inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

247. (1) Izračunati

$$\left(\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}:\frac{3}{5}\right):\left(13+\frac{6}{7}\right)\right)^{-1/2}.$$

248. (2) Odrediti zbir kvadrata rešenja kvadratne jednačine

$$x^2+3\alpha x+\alpha^2=0,$$

gde je α parametar.

249. (3) Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{2-\sin 2x}=\frac{\cos x+\sin x}{2}.$$

2012. septembar

250. (1) Uprostiti izraz

$$\left(3-\frac{(a+b)^2}{ab}\right)\cdot\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right):\frac{a^3+b^3}{ab}.$$

251. (2) Rešiti jednačinu

$$2012^{2x}-2013\cdot 2012^x+2012=0.$$

252. (3) Rešiti jednačinu

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$$

253. (4) Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{2-\sin 2x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

2013. jun

254. (1) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{1}{x^3-x}-\frac{1}{x^3+x}\right):\left(\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2-x}\right).$$

255. (2) Odrediti vrednost izraza

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2}$$

za $a=2$ i $b=3$.

256. (3) Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$49^x-50\cdot 7^x+49=0.$$

257. (4) Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=\sin^4 x+\cos^4 x.$$

258. (5) Ako je

$$f(x)=\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}},$$

odrediti $f(f(x))$.

2013. jun Matematika sa proverom sklonosti za studije inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

259. (1) Izračunati

$$\left[\frac{1}{2}:\frac{3}{4}+\frac{4}{5}:0,6\right]:0,25^2.$$

260. (2) Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{(a+b)^2-2ab}{(a-b)^2+2ab}:\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]=\frac{b-a}{b+a}.$$

261. (3) Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned}\log_{2013}x-\log_{2013}y &= 1\\ x+y &= 2014.\end{aligned}$$

2013. septembar

262. (1) Proveriti tačnost identiteta

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right):\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)\right]\cdot\left[(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{-1}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\right]=\frac{1}{ab}.$$

263. (2) Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$81^x-82\cdot 9^x+81=0.$$

264. (3) Rešiti jednačinu

$$\log_{2013}(2012+x)+\log_{2013}(2014-x)=2.$$

265. (4) Ako je

$$f(x)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}},$$

odrediti $f(f(x))$.

2013. septembar Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

266. (1) Izračunati

$$\left[\frac{2}{3}:\frac{4}{5}-0,6^{-1}:0,2^2\right]\cdot 0,6.$$

267. (2) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{1}{a-3b}-\frac{1}{a+3b}+\frac{6b}{a^2-9b^2}\right):\frac{b(2a+b)}{a^2-9b^2}.$$

268. (3) Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$100^x-101\cdot 10^x+100=0.$$

2014. jun

269. (1) Rešiti jednačinu

$$|x| + |x+1| + |x+2| = 6.$$

270. (2) Neka su a, b i c realni brojevi. Uprostiti izraz

$$\frac{(a+b+c)^2 - (a+b-c)^2}{(a-b+c)^2 - (a-b-c)^2}.$$

Odrediti uslove za a, b i c tako da dati izraz bude definisan.

271. (3) Odrediti zbir kvadrata rešenja jednačine

$$2^{x^2-2x-10} = \frac{1}{4}.$$

272. (4) Proveriti tačnost implikacije:

$$\text{Ako je} \quad (\log_3 x)(\log_x 2x)(\log_{2x} y) = \log_x x^2, \qquad \text{tada je} \quad y = 9.$$

273. (5) Rešiti trigonometrijsku jednačinu

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$$

274. (6) Neka je data funkcija

$$f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}.$$

Izračunati $f^2(x) = f(f(x))$, $f^3(x) = f(f(f(x)))$ i $f^9(x) = f(f(...(f(x))...))$.

2014. jun Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

275. (1) Proveriti tačnost jednakosti

$$(32)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-11} + \left(\frac{1}{1+\sqrt{5}} + \frac{1}{1-\sqrt{5}}\right)^{-1} + (0,5 : 1,25)^{-1} = \frac{5}{2}.$$

276. (2) Rešiti jednačinu

$$\sqrt{3x+13} = 2\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}.$$

277. (3) Proveriti tačnost jednakosti

$$4^{\log_2 3 + \log_4 \frac{5}{11}} = \frac{45}{11}$$

2014. septembar

278. (1) Uprostiti izraz

$$\left[\frac{1}{a-2}-\frac{a}{(a-1)^2+3}\right]:\left[\frac{1-a^2}{a^3+8}+\frac{1+a}{a^2-4}\right].$$

Odrediti vrednost izraza za $a=-1,25$.
279. (2) Rešiti jednačinu

$$\sqrt{2x-3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}.$$

280. (3) Dokazati tačnost jednakosti

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(\log_2\frac{1}{2}\cdot\log_{\frac{1}{2}}8\right)=-\frac{1}{2}.$$

281. (4) Izračunati

$$\sin\frac{\pi}{12}.$$

282. (5) Ako je

$$f(x)=\frac{2014x+1}{2014x-1},$$

izračunati $f(f(x))$.

2014. septembar Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

283. (1) Proveriti tačnost jednakosti

$$\left[\left(\left(7+\frac{1}{3}\right):\frac{11}{6}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}\cdot\left[\left(\left(14+\frac{2}{3}\right):\frac{11}{3}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}=1.$$

284. (2) Rešiti jednačinu

$$\sqrt{2x+14}=\sqrt{x+5}+\sqrt{x-7}.$$

285. (3) Izračunati

$$\log_2(5\log_3 9-\log_5 25).$$

2015. jun

286. (1) Proveriti da li su brojevi

$$\frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \quad \text{i} \quad \frac{-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$

rešenja jednačine $2x^2 + 2x - 1 = 0$.

287. (2) Neka je a realan broj. Dokazati identitet

$$1 - \frac{8}{a^2-4}\left[\left(1 - \frac{a^2+4}{4a}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{a-2}{a+2}.$$

288. (3) Rešiti jednačinu

$$4^{-x+\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0.$$

289. (4) Rešiti sistem jednačina

$$\begin{aligned} \log_2 x + \log_4 y &= -2\log_{\frac{1}{2}} 4, \\ \log_4 x + \log_2 y &= 5. \end{aligned}$$

290. (5) Proveriti identitet

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{\tan^2\alpha + 1}{\tan^2\alpha - 1}.$$

291. (6) Ako je $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, dokazati da je

$$\frac{f(x) - f(y)}{1 + f(x)f(y)} = \frac{y-x}{xy+1}.$$

2015. jun Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

292. (1) Proveriti tačnost jednakosti

$$\left[\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3} : \frac{3}{7}\right) : 10\frac{7}{9}\right]^{-2} = 25.$$

293. (2) Dokazati identitet

$$a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}=2ab,\qquad a>0,\quad b>0.$$

294. (3) Rešiti jednačinu

$$\log_{x-2}(x^2-6x+10)-1=0.$$

2015. septembar

295. (1) Dokazati

$$\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}-\sqrt[3]{3}=0.$$

296. (2) Dokazati

$$\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}=1,\qquad x\neq\pm y.$$

297. (3) Rešiti sistem jednačina

$$\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\qquad x+y=5.$$

298. (4) Rešiti jednačinu

$$(\log_3 x)^2-4\cdot\log_3 x+3=0.$$

299. (5) Proveriti tačnost identiteta

$$\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1+\cos^2\alpha\cos^2\beta.$$

300. (6) Neka je data funkcija

$$f(x)=\frac{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}.$$

Odrediti $f(f(x))$, kao i inverznu funkciju $f^{-1}(x)$.

2015. septembar Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

301. (1) Izračunati

$$\frac{2^{-3}}{3^2} \cdot \left(\frac{2^{-2}}{3}\right)^{-2} : 2.$$

302. (2) Uprostiti izraz

$$\left(a - \frac{27}{a^2}\right) : \frac{a^2 + 3a + 9}{a^2}, \qquad a \neq 0.$$

303. (3) Rešiti sistem jednačina

$$x + y = 11, \qquad xy = 28.$$

304. (4) Dokazati jednakost

$$\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8 \cdot \log_8 9 = 2.$$

2016. jun

305. (1) Izračunati

$$\left(\left(\frac{3}{16} : \left(8 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{25}\right)^{-1/4} - 1\right)^{-4}.$$

306. (2) Dokazati identitet

$$\left(\frac{2ab}{4a^2 - 9b^2} + \frac{b}{3b - 2a}\right) : \left(1 - \frac{2a - 3b}{2a + 3b}\right) = \frac{b}{6b - 4a}.$$

307. (3) Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$2^{x^2 - 5x + 4} = \frac{1}{4}.$$

308. (4) Rešiti logaritamsku jednačinu

$$\log_6(x + 1) + \log_6(2x + 1) = 1.$$

309. (5) Proveriti tačnost identiteta

$$\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}.$$

310. (6) Neka je data funkcija

$$f(x)=1-\frac{1}{1+x}.$$

Odrediti $f^2(x)=f(f(x))$, $f^3(x)=f(f^2(x))$, $f^n(x)$, $n\geq 3$.

2016. jun Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

311. (1) Izračunati

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{11}:\frac{2}{11}\right)^{-1/2}.$$

312. (2) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}\right):\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right),\qquad a\neq\pm 1.$$

313. (3) Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$2^{x^2-6x+8}=8.$$

314. (4) Neka je data funkcija

$$f(x)=\log_3 x+\log_9 x^2.$$

Izračunati $f(\sqrt{27})$.

2016. septembar

315. (1) Izračunati

$$\left[\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}:\frac{3}{5}\right):\left(13+\frac{6}{7}\right)\right]^{-1/2}.$$

316. (2) Dokazati

$$\frac{1}{a^2+2a+1}-\frac{a^2+a}{a^3-1}\cdot\left(\frac{1}{a^2-a}-\frac{a}{1-a^2}\right)=-\frac{4a}{a^4-2a^2+1}.$$

317. (3) Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$3^{x^2-4x+2}=\frac{1}{9}.$$

318. (4) Rešiti logaritamsku jednačinu

$$(\log_5 x)^2=3+\log_5 x^2, \qquad x>0.$$

319. (5) Proveriti tačnost identiteta

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}.$$

320. (6) Neka je data funkcija

$$f(x)=1+\frac{1}{x-1}.$$

Odrediti $f^2(x)=f(f(x))$, $f^3(x)=f(f^2(x))$, $f^4(x)$.

2016. septembar Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

321. (1) Izračunati

$$\left[\frac{5}{2}:\frac{3}{4}-\frac{1}{3}+0,8:0,2\right]^{-2}.$$

322. (2) Uprostiti izraz

$$\left(\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):(a^2-2ab+b^2)\right]:\frac{1}{a-b}, \qquad a\neq\pm b1.$$

323. (3) Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$3^{x^2-7x+15}=27.$$

324. (4) Rešiti jednačinu

$$\log_{2016}x-\log_{2016}2016-\log_{2016}2016^2-\log_{2016}2016^3=2010.$$

2017. jun

325. (1) Proveriti tačnost jednakosti

$$\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]:\frac{(a+b)^2-2ab}{(a-b)^2+2ab}=\frac{b+a}{b-a}, \qquad ab(a-b)\neq 0.$$

326. (2) Rešiti jednačinu

$$9^{-x+\frac{1}{2}}-26\cdot 3^{-x}-9=0.$$

327. (3) Rešiti jednačinu

$$x^{\log_3^2 x+\log_3 x^3+3}=\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$$

328. (4) Rešiti jednačinu

$$\log_9 x+\log_{81} x+\log_3 x=7.$$

329. (5) Proveriti tačnost jednakosti

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha.$$

330. (6) Ako je

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}, \qquad x(x-1)\neq 0,$$

odrediti $f(f(x))$.

2017. Jun Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

331. (1) Izračunati

$$\frac{2^{-4}-3^{-4}}{2^{-1}-3^{-1}}\cdot(2^{-1}+3^{-1})^{-1}.$$

332. (2) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{1}{a-5b}-\frac{1}{a+5b}+\frac{10b}{a^2-25b^2}\right):\frac{b(2a+b)}{a^2-25b^2}.$$

333. (3) Rešiti jednačinu

$$\log_{x+1}(2x^2-3x+7)-2=0.$$

2017. septembar

334. (1) Proveriti tačnost jednakosti

$$\left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{1/2}-3a^{-1/2}}+\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{1/2}+3a^{-1/2}}\right)^2=16a, \qquad a\in R\left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

335. (2) Rešiti jednačinu

$$1+2\log_5(1-x)=\log_5(5-3x).$$

336. (3) Rešiti jednačinu

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\log 4}{\log 8}.$$

337. (4) Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{\sin 2\alpha}{2}=1.$$

2017. septembar Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

338. (1) Proveriti tačnost jednakosti

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{3}{2}:\frac{7}{3}\right):4\frac{2}{7}=\frac{1}{4}.$$

339. (2) Proveriti tačnost jednakosti

$$\frac{x}{y}\left(1-\frac{x}{x+y}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\left(1-\frac{y}{x+y}\right)=1.$$

340. (3) Rešiti eksponencijalnu jednačinu

$$3^{x^2-x-8}=\frac{1}{9}.$$

2018. jun

341. (1) Proveriti tačnost jednakosti

$$\left[\left(\frac{2}{x-y}-\frac{2x}{x^3+y^3}\cdot\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\right):\frac{4y^2}{x^2-2xy+y^2}\right]\cdot\frac{x+y}{x-y}=\frac{1}{2y}.$$

342. (2) Rešiti jednačinu

$$\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}=\frac{3x-6}{(x-1)(x+2).}$$

343. (3) Rešiti jednačinu

$$64\cdot 9^x-84\cdot 12^x+27\cdot 16^x=0.$$

344. (4) Rešiti jednačinu

$$\log_7(\log_5(\log_2 x))=0,\qquad x>0.$$

345. (5) Dokazati identitet

$$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-2\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sin^2\alpha=0.$$

2018. jun Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

346. (1) Izračunati

$$\left(\frac{2^{-2}-3^{-2}}{2^{-1}-3^{-1}}\right)\cdot\left(2^{-1}-3^{-1}\right)^{-1}.$$

347. (2) Dokazati identitet

$$\frac{x^2}{xy+y^2}+\frac{y^2}{x^2+xy}-\frac{x^2+y^2}{xy}=-1.$$

348. (3) Rešiti jednačinu

$$2^{x^2-2x+2}=\frac{1}{4}.$$

2018. septembar

349. (1) Uprostiti izraz

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{ab}+a}-\frac{1}{\sqrt{ab}-a}\right).$$

350. (2) Rešiti jednačinu

$$\frac{2x+1}{3-x}=\frac{4-x}{x+1}.$$

351. (3) Rešiti sistem

$$3^{2x}-2^{y}=77, \qquad 3^{x}-2^{y/2}=7.$$

352. (4) Rešiti jednačinu

$$(\log_5 x)^2=3+\log_5 x^2, \qquad x>0.$$

353. (5) Dokazati identitet

$$\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha=4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha.$$

2018. septembar Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

354. (1) Proveriti

$$\left(\frac{3}{5}:\frac{3}{15}+100\cdot 0,05\right)^{-1/3}=\frac{1}{2}.$$

355. (2) Dokazati identitet

$$\left(\frac{2y}{x+y}+\frac{2y^2}{x^2-y^2}\right)\cdot(x-y)=\frac{2xy}{x+y}.$$

356. (3) Rešiti jednačinu

$$3^{x^2-6x+7}=\frac{1}{9}.$$

2019. jun

357. (1) Uprostiti izraze
(i)
$$\left(a+\frac{ab}{a-b}\right)\cdot\left(\frac{ab}{a+b}-a\right):\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$
(ii)
$$\frac{a^2-b^2}{a-b}-\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}.$$

258. (2) Rešiti jednačinu
$$\log_2(x^2+3x+6)-\log_2 x=3, \qquad x>0.$$

359. (3) Rešiti jednačinu
$$2^{3x-2}-2^{3x-3}-2^{3x-4}-4=0.$$

360. (4) Uprostiti izraz
$$\frac{\sin^3 x+\sin 3x}{\sin x}+\frac{\cos^3 x-\cos 3x}{\cos x}.$$

2019. jun Matematika sa proverom sklonosti za studije Inženjerstva zaštite životne sredine, deo Matematika

361. (1) Izračunati
$$\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\cdot 0,25\right)^{-2}.$$

362. (2) Uprostiti izraz
$$\left(\frac{1}{a+b}-\frac{a}{(a+b)^2}\right):\left(\frac{1}{a+b}-\frac{a}{a^2-b^2}\right).$$

363. (3) Rešiti jednačinu
$$\log_2(x^2-x+2)=3.$$

2019. septembar

364. (1) Dokazati da je za $a > 0$, $b > 0$ i $a \neq b$

$$\left(\frac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a^{1/2}+b^{1/2}} - \sqrt{ab}\right) : \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^{-2} = 1.$$

365. (2) Rešiti jednačinu

$$\log_3 x^3 + (\log_3 x)^2 = 4, \qquad x > 0.$$

366. (3) Rešiti jednačinu

$$\left(\frac{9}{25}\right)^{4x^2+4x-11} \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{2x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{9}.$$

367. (4) Dokazati identitet

$$\frac{1+\sin^2 x - \cos 2x}{1+\cos^2 x + \cos 2x} = \tan^2 x.$$

Prijemni ispit iz Matematike IIZZS septembar 2019.

368. (1) Izračunati

$$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-0,5-\frac{11}{12}\right)^{-\frac{7}{8}}.$$

369 (2) Uprostiti izraz

$$\left(a+\frac{ab}{a-b}\right) : \left(b-\frac{ab}{a-b}\right).$$

370. (3) Rešiti jednačinu

$$\log_2(x^2-5x+14) = 3.$$

PEŠENJA

2009. jun

215. (1) Ako je I dat izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \left[-\frac{1}{p+q} - \frac{p^2+pq+q^2}{p^3-q^3}\right] \cdot \frac{p^2-q^2}{2p^2} + \frac{1}{p^2+p} \\ &= \left[-\frac{1}{p+q} - \frac{1}{p-q}\right] \cdot \frac{p^2-q^2}{2p^2} + \frac{1}{p^2+p} \\ &= -\frac{2p}{(p+q)(p-q)} \cdot \frac{p^2-q^2}{2p^2} + \frac{1}{p^2+p} \\ &= -\frac{1}{p} + \frac{1}{p(p+1)} = \frac{-p-1+1}{p(p+1)} = -\frac{1}{p+1}. \end{aligned}$$

216. (2) Uvođenjem smene $7^x = t$, jednačina postaje $t^2 - 8t + 7 = 0$, odakle se dobija $t_1 = 1$, $t_2 = 7$. Rešenja su $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$.

217. (3) Transformišimo jednačinu

$$\frac{\log x(5x+8)}{\log(5x-4)} = 2, \qquad \log x(5x+8) = \log(5x-4)^2.$$

Antilogaritmovanje daje

$$x(5x+8) = (5x-4)^2, \qquad 5x^2 + 8x = 25x^2 - 40x + 16.$$

Dobijena kvadratna jednačina

$$20x^2 - 48x + 16 = 0, \quad \text{tj.} \quad 5x^2 - 12x + 4 = 0$$

ima rešenja

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{10} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{6 \pm 4}{5}, \qquad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{5},$$

od kojih je samo $x_1 = 2$ i rešenje polazne jednačine.

218. (4) Ako je L leva strana jednakosti, tada je

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\sin(\alpha+2\alpha)}{\sin\alpha} - \frac{\cos(\alpha+2\alpha)}{\cos\alpha} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha}{\cos\alpha} \\
&= \frac{\sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} \\
&= \cos 2\alpha + 2\cos^2\alpha - \cos 2\alpha + 2\sin^2\alpha = 2.
\end{aligned}$$

219. (5)
(a) $\sin 2x = 2\sin x\sqrt{1-\sin^2 x} = 2\sin x\cos x,$
(b) $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sqrt{1-\sin^2\frac{x-y}{2}} = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$

2009. septembar

220. (1) Ako je L izraz sa leve strane, tada je

$$\begin{aligned}
L &= \frac{2a^2+7a+3-(1-2a)(a-1)-3(a^2+a+1)}{(a-1)(a^2+a+1} \\
&= \frac{2a^2+7a+3-a+1+2a^2-2a-3a^2-3a-3}{(a-1)(a^2+a+1)} \\
&= \frac{a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1)} = \frac{1}{a-1}.
\end{aligned}$$

221. (2) Uvođenjem smene $t = \log x$, dobija se

$$\frac{3-t}{5-t} + \frac{t}{1+t} = 1.$$

Oslobađanje od razlomaka daje

$$\begin{aligned}
(3-t)(1+t)+t(5-t) &= (5-t)(1+t) \\
3+3t-t-t^2+5t-t^2 &= 5+5t-t-t^2,
\end{aligned}$$

$$t^2-3t+2=0, \qquad (t-1)(t-2)=0, \qquad t_1=1, \quad t_2=2.$$

Tako je $\log x = 1$, $x_1 = 10$, a drugo rešenje $\log x = 2$, $x_2 = 100$.

222. (3) Ako je L leva strana jednakosti, tada je

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\\
&= \frac{\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}}{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\\
&= \frac{|\sin\alpha-\cos\alpha|}{(\sin\alpha+\cos\alpha)(\sin\alpha-\cos\alpha)}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\\
&= \frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}\\
&= \frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\sin\alpha+\cos\alpha}=\sin\alpha+\cos\alpha.
\end{aligned}$$

2010. jun

223. (1) Ako je L izraz sa leve strane, tada je

$$L=\left(\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}\right)^2\cdot\left(\frac{(x-1)^2(x^2+x+1)^2}{(x+1)^2(x^2-x+1)^2}\right)^2=1.$$

224. (2) Uvođenjem smene $t=7^x$, dobija se kvadratna jednačina $t^2-6t-7=0$, čija su rešenja $t_1=-1$ i $t_2=7$. Eksponencijalna funkcija je uvek pozitivna tako da je $7=7^x$, odnosno $x=1$ jedino rešenje polazne jednačine.

225. (3) Kako je $\frac{2}{5}=0,4$; to iz jednakosti stepena sledi jednakost eksponenata $\log_{0,25}(x^2+5x+8)=-1$. Ova logaritamska jednačina daje ekvivalentnu kvadratnu jednačinu $x^2+5x+8=0,25^{-1}=4$ čija su rešenja $x_1=-1$ i $x_2=-4$.

226. (4) Formula za zbir kubova daje

$$\begin{aligned}
\sin^6 x+\cos^6 x &= (\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)\\
&= \sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-3\sin^2 x\cos^2 x\\
&= 1-3\sin^2 x\cos^2 x,
\end{aligned}$$

dok je $\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$, tako da se dobija ekvivalentna jednačina

$$1-3\sin^2 x\cos^2 x=a(1-2\sin^2 x\cos^2 x).$$

Transformacija $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ daje

$$1-\frac{3}{4}\sin^2 2x = a\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right).$$

Ako se uvede smena $t=\sin^2 2x$, iz poslednje jednačine se dobija $t=\frac{4(a-1)}{2a-3}$, $a\neq\frac{3}{2}$. Jednačina ima rešenje ako i samo ako je $0\leq\sin^2 2x\leq 1$, odnosno ako je $0\leq\frac{4(a-1)}{2a-3}\leq 1$. Rešavanje sistema jednačina daje $a\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

Za $a=3/2$ jednačina nema rešenja jer je

$$\sin^6 x+\cos^6 x\leq\sin^4 x+\cos^4 x<\frac{3}{2}(\sin^4 x+\cos^4 x).$$

227. (5)

$$f(x+5)-f(x-5)=\frac{x-5}{x+15}-\frac{x-15}{x+5}=\frac{x^2-25-x^2+225}{(x+5)(x+15)}=\frac{200}{(x+5)(x+15)}.$$

2010. septembar

228. (1) Ako je R dati razlomak, tada je

$$R=\frac{\frac{(\sqrt{a^2+b^2+c^2})^2-(b^2+c^2-a^2)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}{a^2+b^2+c^2}=\frac{2a^2}{(a^2+b^2+c^2)^{3/2}}.$$

229. (2) Uvođenjem smene $t=3^{\tan x}$, dobija se ekvivalentna kvadratna jednačina $t^2-2t-3=0$, $(t-3)(t+1)=0$, čija su rešenja $t_1=-1$ i $t_2=3$. Eksponencijalna funkcija je uvek pozitivna tako da je $3=3^{\tan x}$. Dobija se $\tan x=1$, odnosno $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

230. (3) Najpre je

$$f(x)=\log_7 x+7\log_3 9+7\log_3 x=\log_7 x+7\log_3 x+14.$$

Dalje je

$$f(\frac{1}{x})=\log_7 x^{-1}+7\log_3 x^{-1}+14=-\log_7 x-7\log_3 x+14,$$

tako da se sabiranjem dobija tražena jednakost.

231. (4) Stepenovanjem identiteta $(\sin^2 x + \cos^2 x)^4 = 1$, dobija se

$$\sin^8 x + 4\sin^6 x\cos^2 x + 6\sin^4 x\cos^4 x + 4\sin^2 x\cos^6 x + \cos^8 x = 1,$$

$$\begin{aligned}\sin^8 x + \cos^8 x &= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x(\sin^4 x + \cos^4 x) - 6\sin^4 x\cos^4 x\\ &= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x(1 - 2\sin^2 x\cos^2 x) - 6\sin^4 x\cos^4 x\\ &= 1 - 4\sin^2 x\cos^2 x + 2\sin^4 x\cos^4 x,\\ &= 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{8}\sin^4 2x.\end{aligned}$$

232. (5) Za $n = 1$ relacija postaje $a_1^2 - a_0a_2 = -1$, $9 - a_2 = -1$, odnosno $a_2 = 10$. Za $n = 2$ se dobija $a_2^2 - a_1a_3 = 1$, $100 - 3a_3 = 1$, tako da je $a_3 = \frac{99}{3} = 33$.

2011. jun

233. (1) Ako je I dat izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x+1} \cdot \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} : \left[\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} \cdot \frac{x-1}{x}\right]\\ &= \left(\frac{x}{x+1}\right)^2. \end{aligned}$$

234. (2) Uvođenjem smene $t = 11^x$, dobija se kvadratna jednačina $t^2 - 12t + 11 = 0$, čija su rešenja $t_1 = 1$, $t_2 = 11$. Rešenja su polazne jednačine su $11^x = 1$, $x_1 = 0$, i $11^x = 11$, $x_2 = 1$.

235. (3) Kako je $1 = \log_2 2$, dobija se

$$\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 \frac{7}{2}, \qquad x - y = 25^{1/2}.$$

Dalje je $\frac{x}{y} = \frac{7}{2}$, $x - y = 5$, odnosno $x = 7$, $y = 2$.

236. (4) Ako je I dati izraz, tada je

$$I = \frac{2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{2\frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha} \cdot \left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\frac{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}\cdot\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sin\alpha)^2} \\
&= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}\cdot(\cos\alpha+\sin\alpha)^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

237. (5) Uvodi se smena $t = 1+\sqrt{x}$, iz koje je $t-1 = \sqrt{x}$, $x = (t-1)^2$. Tako je $f(t) = x$, odnosno

$$f(t) = (t-1)^2, \qquad f(x) = (x-1)^2.$$

Sada se može odrediti i

$$\begin{aligned}
f(f(x)) &= f((x-1)^2) = \left((x-1)^2-1\right)^2 \\
&= (x^2-2x)^2 = x^2(x-2)^2.
\end{aligned}$$

2011. septembar

238. (1) Ako je I dat izraz, tada je

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a-1}\frac{a-a^3}{a+1} - \frac{a^3+1}{a^4-a}\frac{a-a^3}{a+1} \\
&= \frac{1}{a-1}\frac{a(1-a^2)}{a+1} - \frac{a^3+1}{a(a^3-1)}\frac{a(1-a^2)}{a+1} \\
&= -\frac{1}{a-1}\frac{a(a+1)(a-1)}{a+1} + \frac{a^3+1}{a(a-1)(a^2+a+1)}\frac{a(a+1)(a-1)}{a+1} \\
&= -a + \frac{a^3+1}{a^2+a+1} = \frac{1-a-a^2}{1+a+a^2}.
\end{aligned}$$

239. (2) Uvođenjem smene $x = 7^t$, dobija se kvadratna jednačina $x^2-8x+7=0$, čija su rešenja $x_1 = 1$, $t_2 = 7$. Rešenja su polazne jednačine su $7^t = 1$, $t_1 = 0$, i $7^t = 7$, $t_2 = 1$.

240. (3) Izraz date funkcije se može prethodno uprostiti

$$f(x) = \log_x 6 + 3(\log_3 9 + \log_3 x) = \log_6 x + 3\log_3 x + 6.$$

Korišćenjem formule $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ nalazimo

$$f(x) + f(1/x) = \log_x 6 + 3\log_3 x + 6 - \log_6 x - 3\log_3 x + 6 = 12.$$

241. (4)
$$\begin{aligned}\sin^5 x - \sin x \cos^4 x &= \sin x(\cos^4 x - \sin^4 x)\\ &= \sin x(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)\\ &= \sin x \cos 2x.\end{aligned}$$

2012. jun

242. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$I = \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{(x-1)(x^2+x+1)} \cdot \frac{x^3-1}{x+1} = -1.$$

243. (2)

$$I = \frac{\sqrt{x+y} - \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{x+y} + \sqrt{x} + \sqrt{y}}{x + y - (x + 2\sqrt{xy} + y)} = \frac{2\sqrt{x+y}}{-2\sqrt{xy}} = -\sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}.$$

244. (3) Kako je $1/4 = 2^{-2}$, iz date jednačine izlazi

$$x^2 - 2x - 10 = -2, \qquad x^2 - 2x - 8 = 0, \qquad (x-4)(x+2) = 0.$$

Rešenja su $x_1 = 4$ i $x_2 = -2$, tako da je $x_1^2 + x_2^2 = 20$.
245. (4) Korišćenjem formule $\log_b a = \log_2 a / \log_2 b$ mogu se izjednačiti osnove logaritama. Jednostavniji postupak sledi iz obrasca $\log_{b^n} a = \frac{1}{n}\log_b a$

$$4\log_2^2 x + 3\log_2 x - \log_2 x = 2, \qquad 2\log_2^2 x + \log_2 x - 1 = 0.$$

Ova kvadratna jednačina ima dva rešenja

$$\log_2 x = -1, \quad x_1 = \frac{1}{2}; \qquad \log_2 x = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}.$$

246. (5)
$$\begin{aligned}L &= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x}\\ &\quad + \frac{(\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x)}{\sin x - \cos x}\\ &\quad + \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x - \cos^2 x}\\ &= 1 - \sin x \cos x + 1 + \sin x \cos x + 1\\ &= 3.\end{aligned}$$

2012. jun - Matematika sa proverom sklonosti

247. (1)

$$I=\left(\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\right):\frac{97}{7}\right)^{-1/2}=\left(\frac{27+70}{63}\cdot\frac{7}{97}\right)^{-1/2}=\left(\frac{1}{9}\right)^{-1/2}=9^{1/2}=3.$$

248. (2) Za korene kvadratne jednačine $x^2+px+q=0$ važe Vietove formule $x_1+x_2=-p$ i $x_1x_2=q$. Tako je $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=p^2-2q$. U našem slučaju je $x_1^2+x_2^2=9\alpha^2-2\alpha^2=7\alpha^2$.

249. (3) $\dfrac{(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x)}{2-2\sin x\cos x}=\dfrac{\cos x+\sin x}{2}.$

2012. septembar

250. (1)

$$\begin{aligned} I(a,b) &= \frac{3ab-(a+b)^2}{ab}\cdot\frac{b^2-a^2}{ab}\cdot\frac{ab}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\\ &= \frac{a^2-ab+b^2}{ab}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{ab}\cdot\frac{ab}{(a+b)(a^2-ab+b^2)}\\ &= \frac{a-b}{ab}. \end{aligned}$$

251. (2) Uvođenjem smene $t=2012^x$ se dobija kvadratna jednačina

$$t^2-2013t+2012=0,\qquad t^2-t-2012t+2012=0,$$

$$t(t-1)-2012(t-1)=0,\qquad (t-1)(t-2012)=0.$$

Rešenja su $t_1=1$, $2012^x=1$, $x_1=0$, kao i $t_2=2012$, $2012^x=2012$, $x_2=1$.

252. (3) Jednačina ima smisla ako je $x\geq 1$. U tom slučaju je $x+2\sqrt{x-1}>0$, ali je i $x-2\sqrt{x-1}\geq 0$, jer je $x\geq 2\sqrt{x-1}$, $x^2\geq 4(x-1)$, $x^2-4x+4\geq 0$, $(x-2)^2\geq 0$. Kvadriranjem leve i desne strane jednačine se dobija

$$|x+2\sqrt{x-1}|+2\sqrt{x^2-4|x-1|}+|x-2\sqrt{x-1}|=4,$$

$$x+2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-4(x-1)}+x-2\sqrt{x-1}=4,$$

$$2x+2\sqrt{x^2-4x+4}=4,\quad x-2+|x-2|=0.$$

Za $x > 2$ dobija se $x-2+x-2=0$, $x=2$ vrednost koja nije u domenu. Za $x < 2$ dobija se $x-2-(x-2)=0$, $0=0$ te je poslednja jednačina tačna za sve $x \le 2$. Uzimajući u obzir početni uslov, zadata jednačina ima za rešenja sve vrednosti iz interval $x \in [1,2]$.

253. (4)
$$\begin{aligned} L &= \frac{(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x)}{2-\sin 2x} \\ &= \frac{(\cos x+\sin x)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)}{2-\sin 2x} = \frac{\cos x+\sin x}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

2013. jun

254. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \frac{x-1+x+1}{x(x+1)(x-1)} : \frac{x^2+1-x^2+1}{x(x^2-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{2}{x^2-1} : \frac{2}{x(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x^2-1}\cdot\frac{x(x^2-1)(x^2+1)}{2} \\ &= x(x^2+1). \end{aligned}$$

255. (2) Ako je I dati izraz

$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}-\frac{a}{b}+2-\frac{b}{a}} \\ &= \frac{2\frac{a}{b}+2\frac{b}{a}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{ab}. \end{aligned}$$

Za konkretne vrednosti $a=2$ i $b=3$ se dobija 13/12.

256. (3) Uvodjenjem nove nepoznate $t=7^x$ dobija se kvadrana jdnačina $t^2-50t+49=0$. Dobijaju se dva rešenja $t_1=1$ i $t_2=49$. Tako je $7^x=1$, tj. $x_1=0$; i $7^x=49$, tj. $x_2=2$.

257. (4) Jednačina se može napisati u obliku

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^4 x+\cos^4 x,$$

odnosno $\cos^4 x = 0$, koja je ekvivalentna sa $\cos x = 0$, čija su rešenja $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, gde je $k \in Z$ ceo broj.
258. (5) Uvodni korak u rešavanju može biti transformacija

$$f(x) = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Tako je

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = x.$$

Kako je $f(f(x)) = x$ identička funkcija, to znači da je $f = f^{-1}$ funkcija jednaka svojoj inverznoj funkciji.

2013. jun - Matematika sa proverom sklonosti

259. (1) $$\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}+\frac{4}{5}:\frac{6}{10}\right]:\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left[\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right]\cdot 16 = \frac{6}{3}\cdot 16 = 32.$$

260. (2) $$\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}:\left[\frac{a+b}{ab}:\frac{b-a}{ab}\right] = \left[\frac{a+b}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a}\right]^{-1} = \frac{b-a}{b+a}.$$

261. (3) Prva jednačina daje $\log_{2013}\frac{x}{y} = 1$, odakle je $\frac{x}{y} = 2013$. Uzimajući u obzir i drugu jednačinu dobija se rešenje $x = 2013$, $y = 1$.

2013. septembar

262. (1) Transformacije leve strane daju

$$\begin{aligned} L &= \left[\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{ab}}:\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{b+a}{ab} \\ &= \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{\sqrt{ab}}{a+b}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\cdot\frac{a+b}{ab} \\ &= \frac{1}{ab}. \end{aligned}$$

263. (2) Uvodjenjem nove nepoznate $t = 9^x$ dobija se kvadratna jednačina $t^2 - 82t + 81 = 0$. Dobijaju se dva rešenja $t_1 = 1$ i $t_2 = 81$. Tako je $9^x = 1$, tj. $x_1 = 0$; i $9^x = 81$, tj. $x_2 = 2$.

264. (3) Sabiranje logaritama daje

$$\log_{2013}(2012+x)(2014-x)=2, \qquad (2012+x)(2014-x)=2013^2.$$

Dalje je $(2013+x-1)(2013-(x-1))=2013^2-(x-1)^2=2013^2$. Tako je $x-1=0$ tj. $x=1$.

265. (4) Uvodni korak u rešavanju može biti transformacija

$$f(x)=\frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x+1}{x}}=\frac{x-1}{x+1}.$$

Tako je

$$f(f(x))=\frac{\frac{x-1}{x+1}-1}{\frac{x-1}{x+1}+1}=\frac{\frac{x-1-x-1}{x-1}}{\frac{x-1+x+1}{x-1}}=-\frac{1}{x}.$$

2013. septembar - Matematika sa proverom sklonosti

266. (1)

$$\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}-\frac{10}{6}:\left(\frac{2}{10}\right)^2\right]\cdot\frac{6}{10}=\left[\frac{5}{6}-\frac{5}{3}\cdot\frac{25}{1}\right]\cdot\frac{6}{10}=\frac{5-250}{6}\cdot\frac{6}{10}=-\frac{245}{10}=-\frac{49}{2}.$$

267. (2) Transformacije daju

$$\frac{a+3b-a+3b+6b}{a^2-9b^2}\cdot\frac{a^2-9b^2}{b(2a+b)}=\frac{12}{2a+b}.$$

268. (3) Smena $10^x=t$ daje kvadratnu jednačinu $t^2-101t+100=0$, $t^2-100t-t+100=(t-100)(t-1)=0$. Tako su rešenja $t_1=100$ tj. $x_1=2$, i $t_2=1$ tj. $x_2=0$.

2014. jun

269. (1) Razlikujemo četiri slučaja

$$\begin{aligned}
x\le -2: &\quad -x-x-1-x-2=6, \quad x=-3,\\
-2\le x\le -1: &\quad -x-x-x+x+2=6, \quad x=-5\\
-1\le x\le 0: &\quad -x+x+1+x+2=6, \quad x=3,\\
0\le x: &\quad x+x+1+x+2=6, \quad x=1.
\end{aligned}$$

Rešenja su $x_1 = -3$ i $x_2 = 1$.
270. (2) Formula za razliku kvadrata daje

$$\frac{(a+b+c-a-b+c)(a+b+c+a+b-c)}{(a-b+c-a+b+c)(a-b+c+a-b-c)} = \frac{2c \cdot 2(a+b)}{2c \cdot 2(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}.$$

Dati izraz je definisan ako je $a \neq b$.
271. (3) Kako je $1/4 = 2^{-2}$, iz date jednačine izlazi

$$x^2 - 2x - 10 = -2, \qquad x^2 - 2x - 8 = 0, \qquad (x-4)(x+2) = 0.$$

Rešenja su $x_1 = 4$ i $x_2 = -2$, tako da je $x_1^2 + x_2^2 = 20$.
272. (4) Logaritmi se mogu svesti na istu osnovu: ako je c bilo koji pozitivan broj tada

$$\frac{\log_c x}{\log_c 3} \frac{\log_c 2x}{\log_c x} \frac{\log_c y}{\log_c 2x} = 2 \log_x x.$$

Dalje je

$$\frac{\log_c y}{\log_c 3} = 2, \quad \log_x y = \log_x 9, \quad y = 9,$$

tako da je implikacija tačna.
273. (5) $\sin^4 x - \sin^2 x = \cos^4 x - \cos^2 x$, $\sin^2 x(\sin^2 x - 1) = \cos^2 x(1 - \cos^2 x)$, $-\sin^2 x \cos^2 x = \cos^2 x \sin^2 x$, $\sin^2 x \cos^2 x = 0$. Tako je $\sin x = 0$ ili $\cos x = 0$. Rešenja su $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, i $x = \frac{\pi}{2} + l\pi$, $l \in \mathbf{Z}$, ili kraće $x = m\frac{\pi}{2}$ gde je $m \in \mathbf{Z}$.
274. (6) Najpre se može uprostiti

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

Tako je

$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{x}{2x+1},$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} = \frac{x}{3x+1},$$

$$f^6(x) = f^3(f^3(x)) = f^3\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{3 \cdot \frac{x}{3x+1} + 1} = \frac{x}{6x+1},$$

$$f^9(x) = f^3(f^6(x)) = f^3\left(\frac{x}{6x+1}\right) = \frac{\frac{x}{6x+1}}{3 \cdot \frac{x}{6x+1} + 1} = \frac{x}{9x+1}.$$

2014. jun - Matematika sa proverom sklonosti

275. (1) Transformacije daju

$$2^{-10}\cdot 2^{11}+\left(\frac{1-\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}\right)^{-1}+(\frac{1}{2}:\frac{5}{4})^{-1}=2+\frac{1-5}{2}+\frac{5}{2}=\frac{5}{2}.$$

276. (2) Kvadratni koreni su definisani ako i samo ako je $3x+13\geq 0$ i $x-1\geq 0$ i $x+3\geq 0$, to jest $x\geq 1$. Kvadriranjem dobijamo

$$3x+13=4(x+3)+4\sqrt{(x+3)(x-1)}+x-1,$$

odnosno $-x+1=2\sqrt{x^2+2x-3}$. Uz novi u slov $-x+1\geq 0$, dalje se može računati, što nije neophodno, $x^2-2x+1=4(x^2+2x-3)$. Presek dva uslova daje uslov $x=1$, što je i rešenje polazne jednačine.
277. (3)

$$4^{\log_2 3+\log_4\frac{5}{11}}=4^{\log_2 3}\cdot 4^{\log_4\frac{5}{11}}=(2^2)^{\log_2 3}\cdot\frac{5}{11}=2^{\log_2 3^2}\cdot\frac{5}{11}=3^2\cdot\frac{5}{11}=\frac{45}{11}.$$

2014. septembar

278. (1) Transformacije datog izraza I daju

$$\begin{aligned}
I &= \left[\frac{1}{a-2}-\frac{a}{a^2-2a+4}\right]:\left[\frac{(1-a)(1+a)}{(a+2)(a^2-2a+4)}+\frac{1+a}{(a-2)(a+2)}\right]\\
&= \frac{a^2-2a+4-a^2+2a}{(a-2)(a^2-2a+4)}\cdot\frac{a+2}{a+1}:\left[\frac{1-a}{a^2-2a+4}+\frac{1}{a-2}\right]\\
&= \frac{4}{(a-2)(a^2-2a+4)}\cdot\frac{a+2}{a+1}:\frac{a-2-a^2+2a+a^2-2a+4}{(a-2)(a^2-2a+4)}\\
&= \frac{4(a+2)}{(a+1)(a-2)(a^2-2a+4)}\cdot\frac{(a+2)(a-2a+4)}{a+2}\\
&= \frac{4}{a+1}.
\end{aligned}$$

Za $a=-5/4$ dobija se $I(-5/4)=-16$.

279. (2) U domenu realnih brojeva jednačina ima smisla ako su izpunjena tri uslova $x \geq 3/2$, $x \geq 2$, i $x \geq 3$ čiji je presek $x \geq 3$. Kvadriranje leve i desne strane jednačine daje

$$(\sqrt{2x-3})^2 = (\sqrt{x-2})^2 + 2\sqrt{(x-2)(x-3)} + (\sqrt{x-3})^2,$$

$$|2x-3| = |x-2| + \sqrt{x^2-5x+6} + |x-3|,$$

$$2x-3 = x-2+2\sqrt{x^2-5x+6}+x-3, \qquad 1 = \sqrt{x^2-5x+6},$$

$$1 = x^2-5x+6 \quad x^2-5x+5=0, \qquad x_{1,2} = (5 \pm \sqrt{15})/2.$$

Rešenje je $x = (5+\sqrt{15})/2$.

280. (3) Dati izraz je

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(\log_2 2^{-1} \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right) = \log_{\frac{1}{9}}((-1)\cdot(-3)) = \log_{\frac{1}{9}}\left(\frac{1}{9}\right)^{-1/2} = -\frac{1}{2}.$$

281. (4)

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi/6)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{3}/2)}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

282. (5)

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= \frac{2014\frac{2014x+1}{2014x-1}+1}{2014\frac{2014x+1}{2014x-1}-1} = \frac{2014^2x+2014+2014x-1}{2014^2x+2014-2014x+1} \\ &= \frac{2014\cdot 2015x+2013}{2013\cdot 2014x+2015}. \end{aligned}$$

2014. septembar - Matematika sa proverom sklonosti

283. (1) Transformacije daju

$$\left[\left(\frac{22}{3}\cdot\frac{6}{11}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}\cdot\left[\left(\frac{44}{3}\cdot\frac{3}{11}\right)^{-1}+\frac{3}{4}\right]^{1/4} = \left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right]^{1/4}\cdot\left[\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right]^{1/4} = 1.$$

284. (2) Kvadratni koreni su definisani ako je $2x+14 \geq 0$, i $x-7 \geq 0$ i $x+5 \geq 0$, tj. $x \geq 7$. Kvadriranje daje

$$2x+14 = x+5+2\sqrt{(x+5)(x-7)}+x-7.$$

odnosno $8 = \sqrt{x^2 - 2x - 35}$. Novo kvadriranje daje $x^2 - 2x - 99 = 0$ jednačinu čija su rešenja $x = 11$ i $x = -9$. Polazna jednačina ima jedno rešenje $x = 11$.
285. (3)

$$\log_2(5\log_3 3^2 - \log_5 5^2) = \log_2(5\cdot 2\log_3 3 - 2\log_5 5) = \log_2(10-2) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3.$$

2015. jun

286. (1) Ako su x_1 i x_2 dati brojevi, tada

$$\begin{aligned} x_1x_2 &= \frac{-3}{9-3} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}, \\ x_1 + x_2 &= \frac{3\sqrt{3} - 3 - 3\sqrt{3} - 3}{9-3} = \frac{-6}{6} = -1. \end{aligned}$$

Na osnovu Vijetovih formula sledi da su x_1 i x_2 rešenja date jednačine. Zadatak se rešava i direktnim metodama.
287. (2) Transformacije leve strane L jednakosti daju

$$\begin{aligned} L &= 1 - \frac{8}{a^2-4}\left[\frac{4a - a^2 - 4}{4a} : \frac{2-a}{2a}\right] = 1 - \frac{8}{a^2-4}\left[\frac{a^2 + 4 - 4a}{2} : \frac{a-2}{1}\right] \\ &= 1 - \frac{8}{(a-2)(a+2)} \cdot \frac{(a-2)^2}{2} \cdot \frac{1}{a-2} = 1 - \frac{4}{a+2} = \frac{a+2-4}{a+2} = \frac{a-2}{a+2}. \end{aligned}$$

288. (3) Kako je $4^{-x} \cdot 4^{\frac{1}{2}} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 = 0$, uvodjenjem smene $t = 2^{-x}$ dobija se kvadratna jednačina $2t^2 - 7t - 4 = 0$. Rešenja ove jednačine su $t_1 = -\frac{1}{2}$ i $t_2 = 4$. Stepen ne može biti negativan, tako da je $2^{-x} = 2^2$, odnosno jedino rešenje je $x = -2$.
289. (4) Ako se uvede smena $u = \log_2 x$ i $v = \log_2 y$, dobija se sistem $u + \frac{1}{2}v = 2\log_2 4 = 4$, $\frac{1}{2}u + v = 5$. Tako je $u = 2$ i $v = 4$ odnosno $(x, y) = (4, 16)$.
290. (5)

$$\frac{\cos\alpha\sin\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - 1},$$

$$\frac{1}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha},$$

što je identitet.

291. (6)

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(y)}{1+f(x)f(y)} &= \frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{y+1}{y-1}}{1+\frac{x+1}{x-1}\frac{y+1}{y-1}}\\ &= \frac{(x+1)(y-1)-(x-1)(y+1)}{(x-1)(y-1)+(x+1)(y+1)}\\ &= \frac{xy-x+y-1-xy-x+y+1}{xy-x-y+1+xy+x+y+1}\\ &= \frac{2y-2x}{2xy+2}\\ &= \frac{y-x}{xy+1}.\end{aligned}$$

2015. jun - Matematika sa proverom sklonosti

292. (1) Transformacije daju

$$\left[\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{3}\right):\frac{97}{9}\right]^{-2}=\left[\left(\frac{3}{5}+\frac{14}{9}\right)\cdot\frac{9}{97}\right]^{-2}=\left(\frac{97}{45}\cdot\frac{9}{97}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=25.$$

293. (2) Ako je L leva strana jednakosti

$$L=a\cdot\frac{2b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+b\cdot\frac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2ab\sqrt{a}+2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{2ab(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=2ab.$$

294. (3) Jednačina se najpre može napisati u obliku $\log_{x-2}(x^2-6x+10)=1$. Prema definiciji logaritma $\log_c a=x\Leftrightarrow c^x=a$ dobija se

$$x^2-6x+10=(x-2)^1,\quad x^2-7x+12=0,\qquad x_1=3,\quad x_2=4.$$

Jedino rešenje $x_2=4$ zadovoljava polaznu jednačinu. Rešenje $x_1=3$ se odbacuje, jer zamenom se dobija $\log_1 1$. Logaritam sa osnovom 1 nije definisan $\log_1 a$, što se lako proveri iz gornje definicije. Naime, logaritam je definisan samo za osnovu c koja zadovoljava uslove $0<c<1$ i $1<c<+\infty$.

2015. septembar

295. (1)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2},\quad 1=(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}),\qquad 1=3-2.$$

296. (2) Ako je L leva strana, tada

$$\begin{aligned}L &= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x+y}\cdot\frac{1}{(x-y)(x+y)}+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{(x-y)(x+y)}\\ &= \frac{x^2-xy+y^2+2y(x-y)-xy}{(x-y)(x+y)}\\ &= \frac{x^2-2xy+y^2+2xy-2y^2}{(x-y)(x+y)}=\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}=1.\end{aligned}$$

297. (3) Ako se uvede smena $\sqrt{x}=t$ i $\sqrt{y}=s$, sistem postaje $t-s=1$, $t^2+s^2=5$. Eliminacija nepoznate iz prve jednačine $t=1+s$ zamenom u drugu, dobija se jedna jednačina sa jednom nepoznatom

$$1+2s+s^2+s^2=5,\quad 2s^2+2s-4=0,\quad s_1=-2,\quad s_2=1.$$

Po konvenciji kvadratni koren je nenegativan, tako da je $s=1$, i rešenje $x=4$ i $y=1$.

298. (4) Ako se uvede smena $t=\log_3 x$, dobija se kvadratna jednačina $t^2-4t+3=0$, čija rešenja su $t_1=1$ i $t_2=3$. Rešenja polazne jednačine su $x_1=3$ i $x_2=27$.

299. (5) Prebacivanjem se dobija

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha-1 &= \cos^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\beta,\\ \sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha &= \cos^2\beta(\cos^2\alpha-1),\\ \sin^2\alpha(\sin^2\beta-1) &= -\sin^2\alpha\cos^2\beta,\end{aligned}$$

što je tačno.

300. (6) Prvo se može pojednostaviti data formula

$$f(x)=\frac{1-\frac{1}{\frac{x+1}{x}}}{1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}}=\frac{1-\frac{x}{x+1}}{1-\frac{x}{x-1}}=\frac{\frac{x+1-x}{x+1}}{\frac{x-1-x}{x-1}}=\frac{1-x}{1+x}.$$

Sada je

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} = \frac{2x}{2} = x.$$

Kako je $f^2(x) = x$ identična funkcija, to je funkcija f sama sebi inverzna $f^{-1}(x) = f(x)$.

II način. Iz formule $y = \frac{1-x}{1+x}$ se računa x

$$y + xy = 1 - x, \quad x(1+y) = 1 - y, \quad x = \frac{1-y}{1+y}.$$

Medjusobna zamena oznaka promenljivih u formuli $x = \frac{1-y}{1+y}$ daje standardni zapis $y = \frac{1-x}{1+x}$ inverzne funkcije, u kome je x nezavisno promenljiva veličina a y zavisno promenljiva veličina, koji je identičan originalnoj funkciji.

2015. septembar - Matematika sa proverom sklonosti

301. (1) Ako je I dati izraz, tada

$$I = \frac{1}{8\cdot 9}\cdot\left(\frac{1}{4\cdot 3}\right)^{-2} : 2 = \frac{1}{8\cdot 9}\cdot 16\cdot 9 : 2 = 1.$$

302. (2) Ako je I dati izraz, tada je

$$I = \frac{a^3-27}{a^2}\cdot\frac{a^2}{a^2+3a+9} = \frac{(a-3)(a^2+3a+9)}{a^2+3a+9} = a - 3.$$

303. (3) Zamena iz prve jednačine $y = 11 - x$ u drugu jednačinu, daje jednu kvadratnu jednačinu $x(11-x) = 28$, $x^2 - 11x + 28 = 0$. Tako je $x_1 = 7$ i $x_2 = 4$. Rešenja sistema su $(x, y) \in \{(4,7), (7,4)\}$.

304. (4) Ako je L leva strana jednakosti, tada je

$$L = \frac{\log 4}{\log 3}\cdot\frac{\log 5}{\log 4}\cdot\frac{\log 6}{\log 5}\cdot\frac{\log 7}{\log 6}\cdot\frac{\log 8}{\log 7}\cdot\frac{\log 9}{\log 8} = \frac{\log 9}{\log 3} = \log_3 9 = 2.$$

2016. jun

305. (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \left(\left(\frac{3}{16}\cdot\frac{3}{25}+\frac{1}{25}\right)^{-1/4}-1\right)^{-4} = \left(\left(\frac{9+16}{16\cdot 25}\right)^{-1/4}-1\right)^{-4} \\ &= \left(\left(\frac{1}{16}\right)^{-1/4}-1\right)^{-4} = \left(\left(2^{-4}\right)^{-1/4}-1\right)^{-4} = (2-1)^{-4} = 1. \end{aligned}$$

306. (2)

$$\left(\frac{2ab}{(2a-3b)(2a+3b)}+\frac{-b}{2a-3b}\right) : \frac{2a+3b-2a+3b}{2a+3b} = \frac{b}{2(3b-2a)},$$

$$\frac{2ab-2ab-3b^2}{(2a-3b)(2a+3b)}\cdot\frac{2a+3b}{6b} = \frac{-b}{2(2a-3b)},$$

$$\frac{-3b^2}{2a-3b}\cdot\frac{1}{3b} = \frac{-b}{2a-3b}.$$

307. (3) $x^2-5x+6=0$, $x_1=2$, $x_2=3$.

308. (4) Jednačina ima smisla za $x+1>0$ i $2x+1>0$, to jest $x>-1$ i $x>-\frac{1}{2}$, odnosno $x>-\frac{1}{2}$. Tada je $\log_6(x+1)(2x+1)=1$, $(x+1)(2x+1)=6^1$, $2x^2+3x-5=0$, $x_1=-\frac{5}{2}$ i $x_2=1$. Obzirom na domen jednačine $x=1$ je jedino rešenje date jednačine.

309. (5)

$$\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}.$$

$\cos\alpha+\sin\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha-2\sin^3\alpha = \cos\alpha-\sin\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$,

$\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha) = \sin\alpha(-1+2\cos^2\alpha)$, $\quad 2 = 2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$, $\quad 2=2$.

310. (6) Prvo se može pojednostaviti data formula

$$f(x) = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{x+1}.$$

Sada je

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{x}{2x+1},$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{x}{3x+1}.$$

Matematičkom indukcijom je lako zaključiti

$$f^n(x) = \frac{x}{nx+1}.$$

2016. septembar - Matematika sa proverom sklonosti

311. (1) Ako je I dati izraz, tada

$$I = \left(\frac{1}{2}+\frac{7}{2}\right)^{-1/2} = 4^{-1/2} = (2^2)^{-1/2} = \frac{1}{2}.$$

312. (2) Ako je I dati izraz, tada

$$I = \frac{a+1+a-1}{(a-1)(a+1)} : \frac{a+1-a+1}{(a-1)(a+1)} = \frac{2a}{a^2-1} : \frac{2}{a^2-1} = a.$$

313 (3)

$$x^2-6x+5=0, \quad x_1=1, \quad x_2=5.$$

314. (4)

$$f(\sqrt{27}) = f(3^{3/2}) = \log_3 3^{3/2}+\log_9 3^{(3/2)\cdot 2} = \frac{3}{2}\log_3 3+\log_9(9\cdot 3) = \frac{3}{2}+1+\frac{1}{2} = 3.$$

2016. jun

315 (1) Ako je I dati izraz, tada je

$$\begin{aligned} I &= \left[\left(\frac{3}{7}+\frac{10}{3}\right) : \left(13+\frac{6}{7}\right)\right]^{-1/2} \\ &= \left[\frac{97}{7\cdot 9}\cdot\frac{7}{97}\right]^{-1/2} = \left[9^{-1}\right]^{-1/2} = 3. \end{aligned}$$

316 (2) Ako je L leva strana, tada

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{a(a+1)}{(a-1)(a^2+a+1)}\cdot\frac{a+1+a^2}{a(a-1)(a+1)} \\ &= \frac{1}{(a+1)^2} - \frac{1}{(a-1)^2} = \frac{a^2-2a+1-a^2-2a-1}{(a^2-1)^2} = -\frac{4a}{a^4-2a^2+1} \end{aligned}$$

317 (3) $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x_{1,2} = 2$.
318 (4) $(\log_5 x)^2 - 3 - 2\log_5 x = 0$, kad se uvede smena $\log_5 x = t$ dobiće se jednačina $t^2 - 2t - 3 = 0$, čija su rešenja $t_1 = -1$, $t_2 = 3$. Tako je $x_1 = \frac{1}{5}$ i $x_2 = 125$.
319 (5) Važi formula za dvostruki ugao $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, tako da ostaje da se proveri $1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)^2$

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)^2,$$

što je identitet.
320 (6) Prvo se može pojednostaviti data formula

$$f(x) = \frac{1 + x - 1}{x - 1} = \frac{x}{x = 1}.$$

Sada je

$$f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{x}{1} = x,$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(x), \qquad f^4(x) = f^2(f^2(x)) = f^2(x) = x.$$

2016. septembar - Matematika sa proverom sklonosti

321 (1) Ako je I dati izraz, tada

$$I = \left[\frac{10}{3} - \frac{1}{3} + 4\right]^{-2} = [3 + 4]^{-2} = \c{1}49.$$

322 (2) Ako je I dati izraz, tada

$$I = \left[\frac{a^2 - b^2}{ab} : (a^2 - 2ab + b^2)\right] : \frac{1}{a - b} = \frac{a + b}{ab(a - b)} \cdot (a - b) = \frac{a + b}{ab}.$$

323 (3)

$$x^2 - 7x + 12 = 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 4.$$

324 (4)

$$\log_{2016} x = 2010 + 1 + 2 + 3, \quad x = 2016^{2016}.$$

2017. jun

325. (1) $$\left[\frac{a+b}{ab} : \frac{b-a}{ab}\right] : \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = \frac{a+b}{ab} \cdot \frac{ab}{b-a} = \frac{b+a}{b-a}.$$

326. (2) Kako je $9^{-x} \cdot 9^{\frac{1}{2}} - 26 \cdot 3^{-x} - 9 = 0$, uvodjenjem smene $t = 3^{-x}$ dobija se kvadratna jednačina $3t^2 - 26t - 9 = 0$. Rešenja ove jednačine su $t_1 = (26 \pm \sqrt{784})/6$, $t_{1,2} = -\frac{1}{3}$ i $t_2 = 9$. Stepen ne može biti negativan, tako da je $3^{-x} = 9$, odnosno jedino rešenje je $x = -2$.

327. (3) Posle sredjivanja se dobija

$$x^{\log_3^2 x + 3\log_3 x + 3} = x.$$

Skup dopustivih vrednosti x je $(0, +\infty)$. Jedno rešenje je $x = 1$. Druga rešenja se dobijaju iz jednačine

$$\log_3^2 x + 3\log_3 x + 2 = 0.$$

To su brojevi $x = \frac{1}{3}$ i $x = \frac{1}{9}$.

328. (4)

$$\begin{aligned} \log_{3^2} x + \log_{3^4} x + \log_3 x &= 7 \\ \tfrac{1}{2}\log_3 x + \tfrac{1}{4}\log_3 x + \log_3 x &= 7 \\ \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + 1\right)\log_3 x &= 7 \end{aligned}$$

$$\frac{2+1+4}{4}\log_3 x = 7, \qquad \log_3 x = 4, \quad x = 3^4, \quad x = 81.$$

329. (5) Ako je I izraz sa leve strane date jednakosti, tada

$$\begin{aligned} I &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha \\ &= -\sin^2\alpha\cos^2\alpha = -\frac{(2\sin\alpha\cos\alpha)^2}{4} = -\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha. \end{aligned}$$

330. (6) Uvodni korak u rešavanju može biti transformacija

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)^{-1} = \frac{x+1}{x-1}.$$

Tako je

$$f(f(x)) = \frac{\frac{x+1}{x-1} + 1}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x+1+x-1}{x-1}}{\frac{x+1-x+1}{x-1}} = x.$$

Kako je $f(f(x)) = x$ identička funkcija, to znači da je $f = f^{-1}$ funkcija jednaka svojoj inverznoj funkciji.

2017. septembar - Matematika sa proverom sklonosti

331. (1)

$$\begin{aligned} I &= \frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{81}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1} = \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)}{\frac{1}{4}-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4}+\frac{1}{9} = \frac{13}{18}. \end{aligned}$$

332. (2) Transformacije daju

$$\frac{a+5b-a+5b+10b}{a^2-25b^2}\cdot\frac{a^2-25b^2}{b(2a+b)} = \frac{20}{2a+b}.$$

333. (3) Najpre je $\log_{x+1}(2x^2-3x+7)=2$. Prema definiciji logaritma dobija se

$$2x^2-3x+7=(x+1)^2, \quad x^2-5x+6=0, \qquad x_1=2, \quad x_2=3.$$

Logaritam je definisan samo za pozitivnu vrednost numerusa, što je ispunjeno.

2017. septembar

334. (1) Ako je I izraz sa leve strane date jednakosti, tada

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{(2a^{1/2}-3a^{-1/2})(2a^{1/2}+3a^{-1/2})}{2a^{1/2}-3a^{-1/2}} + \frac{(2a^{1/2}-3a^{-1/2})(2a^{1/2}+3a^{-1/2})}{2a^{1/2}+3a^{-1/2}}\right)^2 \\ &= \left(2a^{1/2}+3a^{-1/2}+2a^{1/2}-3a^{-1/2}\right)^2 = \left(4a^{1/2}\right)^2 = 16a. \end{aligned}$$

335. (2) Oblast definisanosti jednačine je odredjena uslovima $1-x>0$, $5-3x>0$, odnosno $(-\infty,1)$.

$$\log_5\frac{5-3x}{(1-x)^2}=1, \quad \text{antilogaritmovanjem} \quad \frac{5-3x}{(1-x)^2}=5.$$

Posle sredjivanja dobija se kvadratna jednačina $5x^2-7x=0$, čija rešenja su $x=0$ i $x=\frac{7}{5}$. Drugo rešenje ne pripada domenu, tako da je jedino rešene polazne jednačine $x=0$.

336. (3)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-3} = \frac{2\log_2 2}{3\log_2 2}, \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-3x+3} = \frac{2}{3}, \qquad x = 2.$$

337. (4)

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = 1.$$

$$\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha = 1, \qquad 1 = 1.$$

2017. septembar - Matematika sa proverom sklonosti

338. (1) Akio je I izraz sa leve strane jednakosti, tada

$$I = \left(\frac{3}{7} + \frac{9}{14}\right) : \frac{30}{7} = \frac{15}{14} \cdot \frac{7}{30} = \frac{1}{4}.$$

339. (2) Ako je I izraz sa leve strane date jednačine, tada

$$I = \frac{x}{y}\frac{y}{x+y} + \frac{y}{x}\frac{x}{x+y} = \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = 1.$$

340. (3) $9^{x^2-x-8} = 3^{-2}$, tako da izjednačavanje eksponenata daje $x^2-x-6 = 0$, čija su rešenja $x_1 = -2$ i $x_2 = 3$.

2018. jun

341. (1) Ako je L dati izraz, tada

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{2}{x-y} - \frac{2x}{(x+y)(x-y)}\right) \cdot \frac{(x-y)^2}{4y^2} \cdot \frac{x+y}{x-y} \\ &= \frac{2x+2y-2x}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{(x-y)^2}{4y^2} \cdot \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{2y}. \end{aligned}$$

342. (2) Oslobadjanje od razlomaka daje

$$3x(x+2)-2x(x-1) = 3x-6, \quad 3x^2+6x-2x^2+2x-3x+6 = 0, \quad x^2+5x+6 = 0.$$

Rešavanje daje $x_1 = -3$, $x_2 = -2$. Polazna jednačina nema smisla za $x = -2$, tj. -2 nije u njenom domenu definisanosti. Jedino rešenje je $x = -3$.
343. (3)

$$64 \cdot 3^{2x} - 84 \cdot 3^x \cdot 4^x + 27 \cdot 4^{2x} = 0,$$

smenom $u = 3^x$, $v = 4^x$ se dobija $64u^2 - 84uv + 27v^2 = 0$. Deljenje sa v^2 daje kvadratnu jednačinu. Radi lakseg računa, neka je $U = 4u = 4 \cdot 3^x$, $V = 3v = 3 \cdot 4^x$. Sada je

$$4U^2 - 7UV + 3V^2 = 0, \qquad 4\left(\frac{U}{V}\right)^2 - 7\frac{U}{V} + 3 = 0.$$

$$\left(\frac{U}{V}\right)_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{8} = \frac{7 \pm 1}{8}.$$

$$\frac{4 \cdot 3^x}{3 \cdot 4^x} = 1, \quad x_1 = 1; \qquad \frac{4 \cdot 3^x}{3 \cdot 4^x} = \frac{3}{4}, \quad x_2 = 2.$$

344. (4) Prema definiciji logaritma važi $\log_5(\log_2 x) = 1$. Sada je $\log_2 x = 5$, tako da je $x = 2^5 = 32$.
345. (5) Ako je I dati izraz, tada

$$\begin{aligned} I &= (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) - 2\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \sin^2\alpha \\ &= \sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha - 2\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \sin^2\alpha \\ &= -\sin^4\alpha + \sin^2\alpha(1 - \cos^2\alpha) = 0. \end{aligned}$$

2018. jun - Matematika sa proverom sklonosti

346. (1)

$$\left(\frac{2^{-2} - 3^{-2}}{2^{-1} - 3^{-1}}\right) \cdot \left(2^{-1} - 3^{-1}\right)^{-1} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{9-4}{36}}{\frac{3-2}{6}} \cdot \frac{1}{\frac{3-2}{6}} = 5.$$

347. (2) Ako je L leva strana, tada

$$\begin{aligned} L &= \frac{x^2}{y(x+y)} + \frac{y^2}{x(x+y)} - \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x^3+y^3}{xy(x+y)} - \frac{x^2+y^2}{xy} \\ &= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy(x+y)} - \frac{x^2+y^2}{xy} = -1. \end{aligned}$$

348. (3)

$$2^{x^2-2x+2} = 2^{-2}, \qquad x^2 - 2x + 4 = 0, \qquad x_1 = x_2 = 2.$$

2018. septembar

349. (1) Ako je L izraz sa leve strane, tada

$$\begin{aligned} L &= \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} : \frac{\sqrt{ab}-a-\sqrt{ab}-a}{ab-a^2} \\ &= \frac{2\sqrt{a}}{a-b} \cdot \frac{a(b-a)}{-2a} = \sqrt{a}. \end{aligned}$$

350. (2) Množenje daje $(2x+1)(x+1) = (4-x)(3-x)$, ili $x^2+10x-11 = 0$. Rešenja su $x_1 = -11$ i $x_2 = 1$.

351. (3) Smena $u = 3^x$, $v = 2^{y/2}$ daje $u^2 - v^2 = 77$, $u - v = 7$. Kako je $u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$, to je $u + v = 11$. Sada imamo ekvivalentan sistem $u + v = 11$, $u - v = 7$. Otuda je $2u = 18$, $u = 9$, $x = 2$. slično $v = 2$, $2^{y/2} = 2$, $y = 2$.

352. (4) Ako se uvede smena $\log_5 x = t$ dobija se $t^2 - 2t - 3 = 0$, rešenja su $t_1 = -1$, $t_2 = 3$. Sada je $\log_5 x = -1$, $x = 5^{-1} = \frac{1}{5}$. Takodje $\log_5 x = 3$, $x = 5^3 = 125$

353. (5) Ako je L izraz sa leve strane, tada

$$\begin{aligned} L &= 2\sin\frac{2\alpha+4\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha-4\alpha}{2} - 2\sin 3\alpha\cos 3\alpha \\ &= 2\sin 3\alpha(\cos\alpha - \cos 3\alpha) = 2\sin 3\alpha(-2\sin 2\alpha\sin(-\alpha)) \\ &= 4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha. \end{aligned}$$

2018. septembar - Matematika sa proverom sklonosti

354. (1) $\left(\frac{3}{5}\cdot\frac{15}{3}+5\right)^{-1/3} = (3+5)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$.

355. (2)

$$\left(\frac{2y}{x+y} + \frac{2y^2}{(x+y)(x-y)}\right)\cdot(x-y) = \frac{2xy-2y^2}{x+y} + \frac{2y^2}{x+y} = \frac{2xy}{x+y}.$$

356. (3) $3^{x^2-6x+7} = 3^{-2}$, $\quad x^2 - 6x + 9 = 0$, $\quad x_1 = x_2 = 3$.

2019. jun

357. (1) (*i*)

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^2-ab+ab}{a-b}\cdot\frac{ab-a^2-ab}{a+b}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\\ &= \frac{-a^4}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{a^2+b^2} = -\frac{a^4}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} I &= \frac{(a-b)(a+b)}{a-b}-\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a-b)(a+b)} = \frac{(a+b)^2-(a^2+ab+b^2)}{a+b}\\ &= \frac{a^2+2ab+b^2-a^2-ab-b^2}{a+b} = \frac{ab}{a+b}. \end{aligned}$$

358. (2)

$$\log_2\frac{x^2+3x+6}{x}=3,\quad \frac{x^2+3x+6}{x}=2^3,\quad x^2-5x+6=0,\quad x_1=2,\quad x_2=3.$$

359. (3)

$$\frac{2^{3x}}{4}-\frac{2^{3x}}{8}-\frac{2^{3x}}{16}-4=0,\quad 4\cdot2^{3x}-2\cdot2^{3x}-2^{3x}-64=0,\quad 2^{3x}=64,\quad x=2.$$

360. (4)

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sin^3 x+\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x}{\sin x}+\frac{\cos^3 x-\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x}{\cos x}\\ &= \sin^2 x+\cos 2x+2\cos^2 x+\cos^2 x-\cos 2x+2\sin^2 x\\ &= \sin^2 x+\cos^2 x-\sin^2 x+2\cos^2 x+\cos^2 x-\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin^2 x\\ &= 3\cos^2 x+3\sin^2 x=3. \end{aligned}$$

2019. jun - Matematika sa proverom sklonosti

361. (1)

$$\left(\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{15+1}{6}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{8}\right)^{2}=\frac{9}{64}.$$

362. (2)

$$\frac{a+b-a}{(a+b)^2} : \frac{a-b-a}{(a-b)(a+b)} = \frac{b}{(a+b)^2} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{-b} = \frac{b-a}{a+b}.$$

363. (3)

$$x^2-x+2 = 2^3, \qquad x^2-x-6=0, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}, \quad x_1=-2, \quad x_2=3.$$

2019. septembar

364. (1)

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-\sqrt{a}\sqrt{b}+b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \cdot \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{(a-b)^2} \\ &= \left(a-\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab}\right) \cdot \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{a-2\sqrt{ab}+b} = 1. \end{aligned}$$

365. (2)

$$3\log_3 x + (\log_3 x)^2 - 4 = 0, \quad \log_3 x = t, \quad t^2+3t-4=0, \quad t_1=-4, \quad t_2=1,$$

$$\log_3 x = -4, \quad x = 3^{-4} = \frac{1}{81}, \qquad \log_3 x = 1, \quad x = 3^1 = 3.$$

366. (3)

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{8x^2+8x-22} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-2x-1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-9}, \quad 8x^2+8x-22-2x-1=-9,$$

$$4x^2+3x-7=0, \quad x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+112}}{8}, \quad x_1 = -\frac{7}{4}, \quad x_2 = 1.$$

367. (4)

$$\frac{1+\sin^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{1+\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{3\sin^2 x}{3\cos^2 x} = \tan^2 x.$$

2019. septembar - Matematika sa proverom sklonosti

368. (1)

$$\left(\frac{12+8+9-6-11}{12}\right)^{-\frac{7}{8}} = \left(\frac{12}{12}\right)^{-\frac{7}{8}} = 1.$$

369. (2)

$$\frac{a^2-ab+ab}{a-b} : \frac{ab-b^2-ab}{a-b} = \frac{a^2}{a-b}\cdot\frac{a-b}{-b^2} = -\frac{a^2}{b^2}.$$

370. (3)

$x^2-5x+14=8, \quad x^2-5x+6=0. \quad x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}, \quad x_1=2, \quad x_2=3.$